応用数学 I　解答例

2011.04.29

問題　次の問に答えよ．

(i) a，b を正数とし，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ で定められる領域の面積を求めよ．

(ii) xy 平面上で $x\geq 0$，$y\geq 0$ をみたす領域を D とするとき，重積分

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

を求めよ．

（解） 線形変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \end{pmatrix}$$

により，領域 $x^2+y^2\leq 1$ は領域 $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}\leq 1$ に写されるので，求める面積は $a\,b\,\pi$ である．(ii) 極座標 $x=r\,\cos\theta$，$y=r\,\sin\theta$ を用いると，$r\geq 0$，$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]'\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる．■