応用数学 I　解答例

2011.04.19

問題　与えられた自然数 n, m に対して，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=f_n(x)\,f_m(y)$ で定義する．ただし，

$$f_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}$$

とする．このとき，変数変換 $y=t\,z$ を用いて，

$$g(z)=\int_0^z f(z-y,y)\,dy$$

をできるだけ簡単にせよ．

（解） 変数変換 $y=t\,z$ により，

$$\begin{aligned}f(z-t\,z,t\,z)\,z&=\frac{(z-t\,z)^{\frac{n}{2}-1}\;e^{-\frac{z-t\,z}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{(t\,z)^{\frac{m}{2}-1}\;e^{-\frac{t\,z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot z\\&=\frac{z^{\frac{n+m}{2}-1}\,e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{n+m}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{m}{2})}\,t^{\frac{m}{2}-1}\;(1-t)^{\frac{n}{2}-1}=\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})\,f_{n+m}(z)}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{m}{2})}\,t^{\frac{m}{2}-1}\;(1-t)^{\frac{n}{2}-1}\end{aligned}$$

であり，下記の参考を適用して

$$g(z)=\int_0^1 f(z-t\,z,t\,z)\,z\,dt=\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})\,f_{n+m}(z)}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{m}{2})}\;\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}\;(1-t)^{\frac{n}{2}-1}\;dt=f_{n+m}(z)$$

となる． ■

■参考　正数 x, y に対して，（広義）積分

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\;(1-t)^{y-1}\;dt$$

は存在し，$B(x,y)$ を**ベータ関数**という．ガンマ関数とベータ関数には

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

が成り立つ．

（解） 変数変換 $t=\sin^2\theta$ により

$$B(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\;\left(1-\sin^2\theta\right)^{y-1}\;2\,\sin\theta\,\cos\theta\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\,x-1}\theta\,\cos^{2\,y-1}\theta\,dt$$

となり，変数変換 $t=s^2$ により

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}\,e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty}\left(s^2\right)^{z-1}\;e^{-s^2}\,2\,s\,ds=2\int_0^{+\infty}s^{2\,z-1}\,e^{-s^2}\,ds$$

となることに注意したい．極座標（$s = r\,\cos\theta$，$t = r\,\sin\theta$）に変換すると，$ds\,dt = r\,dr\,d\theta$ より

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\,\Gamma(y) &= 4\int_0^{+\infty} s^{2\,x-1}\,e^{-s^2}\,ds\int_0^{+\infty} t^{2\,y-1}\,e^{-t^2}\,dt \\
&= 4\iint_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} s^{2\,x-1}\,t^{2\,y-1}\,e^{-\left(s^2+t^2\right)}\,ds\,dt \\
&= 4\iint_{[0,+\infty)\times[0,\frac{\pi}{2}]} (r\,\cos\theta)^{2\,x-1}\,(r\,\sin\theta)^{2\,y-1}\,e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2\,x+2\,y-1}\,e^{-r^2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\,x-1}\theta\,\cos^{2\,y-1}\theta\,d\theta\right)dr \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2\,x+2\,y-1}\,e^{-r^2}\,B(x,y)\,dr = B(x,y)\,\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

となる．■