応用数学 I　解答例

2011.04.12

問題　ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

について，$\Gamma(1)=1$ および $\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$ が成り立つことをできるだけ数学的に証明せよ．

（解） $\Gamma(z)$ を定義する積分は広義積分であることに注意したい．

$$\Gamma(1) = \lim_{v\to+\infty}\int_0^v e^{-t}\,dt = \lim_{v\to+\infty}\left(\left[-e^{-t}\right]_0^v\right) = \lim_{v\to+\infty}\left(1-e^{-v}\right) = 1$$

である．$0<u<1<v$ をみたす任意の u，v に対して，

$$\int_u^v t^{z-1}\,e^{-t}\,dt \geq \int_u^1 t^{z-1}\,e^{-t}\,dt \geq \int_u^1 t^{z-1}\,e^{-1}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{e\,z}\,(1-u^z) & (z\neq 0) \\ -\dfrac{\log u}{e} & (z=0) \end{cases}$$

である．$z\leq 0$ ならば，$u\to 0$ のとき上式右辺は $+\infty$ に発散するので，$\Gamma(z)$ を定義することができない．したがって，$z>0$ の範囲で $\Gamma(z)$ を考える．u，v は $0<u<1<v$ をみたすものとする．部分積分法より

$$\begin{aligned}\int_u^v t^z\,e^{-t}\,dt &= \int_u^v t^z\,\left[-e^{-t}\right]'\,dt = \left[t^z\,\left(-e^{-t}\right)\right]_u^v - \int_u^v z\,t^{z-1}\,\left(-e^{-t}\right)\,dt \\ &= u^z\,e^{-u} - v^z\,e^{-v} + z\int_u^v t^{z-1}\,e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

となる．z を超えない最大の整数を $[z]$ で表すと，$[z]\leq z<[z]+1$ が成り立つ．また，すべての $x\geq 0$ に対して

$$e^x \geq 1, \qquad e^x \geq \frac{x^{[z]+1}}{([z]+1)!}$$

であることに注意すると，

$$0 < u^z\,e^{-u} < u^z, \qquad 0 < v^z\,e^{-v} = \frac{v^z}{e^v} \leq \frac{([z]+1)!}{v^{([z]+1)-z}}$$

が得られ，はさみうちの原理より

$$\lim_{u\to 0}\left(u^z\,e^{-u}\right) = 0, \qquad \lim_{v\to+\infty}\left(v^z\,e^{-v}\right) = 0$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to+\infty}}\int_u^v t^z\,e^{-t}\,dt = \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to+\infty}}\left(u^z\,e^{-u} - v^z\,e^{-v} + z\int_u^v t^{z-1}\,e^{-t}\,dt\right) \\ &= z\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to+\infty}}\left(\int_u^v t^{z-1}\,e^{-t}\,dt\right) = z\,\Gamma(z)\end{aligned}$$

が成り立つ．■