統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2011 年 1 月 26 日

● 確率変数 X と Y が独立であるとき，$E[X\,Y] = E[X]\,E[Y]$ が成り立つことを示せ.

(解) X と Y の同時分布関数を $F(x,y)$，X および Y の周辺分布関数をそれぞれ $F_X(x)$，$F_Y(y)$ とすると，X と Y が独立であるから，$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$ が成り立つ．また，X と Y の同時確率密度関数を $f(x,y)$，X および Y の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_X(x)$，$f_Y(y)$ とすると，

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv, \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du, \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$

である．$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv =& F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) = \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv\right)\\ =& \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\,f_Y(v)\,du\,dv\end{aligned}$$

より，$f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ となる．これにより

$$\begin{aligned}E[X\,Y] =& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f_X(x)\,f_Y(y)\,dx\,dy\\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,E[X]\,dy\\ =& E[X]\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy = E[X]\,E[Y]\end{aligned}$$

が得られる．■