

統計学概論・確率論 (221710/224940) 解答例

2011年1月19日

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき, 積率母関数 $m_X(t)$ を用いて, X の期待値 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ.

(解) 二項定理より, 積率母関数 $m_X(t)$ は

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^n e^{tk} {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (e^t p)^k (1-p)^{n-k} = \{e^t p + (1-p)\}^n$$

となる. t で微分することにより

$$\begin{aligned} m'_X(t) &= n \{e^t p + (1-p)\}^{n-1} e^t p, \\ m''_X(t) &= n(n-1) \{e^t p + (1-p)\}^{n-2} (e^t p)^2 + n \{e^t p + (1-p)\}^{n-1} e^t p \end{aligned}$$

であるから,

$$m'_X(0) = np, \quad m''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$$

が得られる. したがって,

$$E[X] = m'_X(0) = np, \quad V[X] = m''_X(0) - \{m'_X(0)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

となる. ■