統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2010 年 12 月 15 日

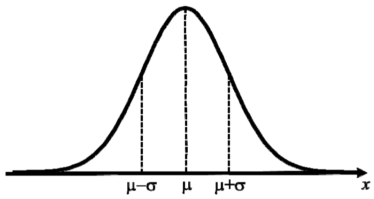
● 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ のグラフを描け.

(解) $f(x)$ の 1 階微分 $f'(x)$，2 階微分 $f''(x)$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left\{ -\frac{2\,(x-\mu)}{2\,\sigma^2} \right\} = -\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \\
f''(x) =& -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} \left\{ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} \left\{ 1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

であるから，$f(x)$ の増減表は下表のようになる.

x		$\mu-\sigma$		μ		$\mu+\sigma$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}\,\sigma}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}\,\sigma}$	$\searrow 0$



また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ であるから，$f(x)$ のグラフは上のようになる.　■