統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2010 年 12 月 8 日

● $\lambda > 0$ とする．ポアソン分布

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

の期待値と分散を求めよ．必要があれば，$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ を用いてもよい．

(解)　変数変換 $k = \ell + 1$ より

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

となる．また，変数変換 $k = j + 2$ より

$$\begin{aligned} E[X^2] - \lambda =& \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\ (k-1)\ \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ =& \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\ (k-1)\ \lambda^{k-2}}{k\ (k-1)\ (k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

が得られるので，

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \left(\lambda^2 + \lambda\right) - \lambda^2 = \lambda$$

である．■