統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2010 年 12 月 1 日

● $0 < p < 1$ とするとき，和

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k},\\
S_2 &= \sum_{k=0}^{n} k\, {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k},\\
S_3 &= \sum_{k=0}^{n} k\ (k-1)\ {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

を求めよ．

(解) $1 \le k \le n$ をみたす自然数 n，k に対して $k\, {}_nC_k = n\, {}_{n-1}C_{k-1}$ であることに注意すると，$2 \le k \le n$ をみたす自然数 n，k に対して

$$
k\ (k-1)\ {}_nC_k = n\ (k-1)\ {}_{n-1}C_{k-1} = n\ (n-1)\ {}_{n-2}C_{k-2}
$$

である．変数変換 $\ell = k-1$，$j = k-2$ と二項定理より，

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \{p + (1-p)\}^n = 1,\\
S_2 =& \sum_{k=1}^{n} k\, {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\, {}_{n-1}C_{k-1}\, p^k\ (1-p)^{n-k} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell\, p^{\ell+1}\ (1-p)^{n-(\ell+1)}\\
=& n\, p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell\, p^\ell\ (1-p)^{(n-1)-\ell} = n\, p\ \{p + (1-p)\}^{n-1} = n\, p,\\
S_3 =& \sum_{k=2}^{n} k\ (k-1)\ {}_nC_k\, p^k\ (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1)\ {}_{n-2}C_{k-2}\, p^k\ (1-p)^{n-k}\\
=& n\ (n-1) \sum_{j=0}^{n-2} {}_{n-2}C_j\, p^{j+2}\ (1-p)^{n-(j+2)} = n\ (n-1)\ p^2 \sum_{j=0}^{n-2} {}_{n-2}C_j\, p^j\ (1-p)^{(n-2)-j}\\
=& n\ (n-1)\ p^2\ \{p + (1-p)\}^{n-2} = n\ (n-1)\ p^2
\end{aligned}
$$

である．■