

統計学概論・確率論 (221710/224940) 解答例

2010年11月17日

集合 A と集合 B の要素の数 (濃度という.) が等しいということをどのように定義すればよいか.

(解) ものの数を数えるとき, 自然数と対応付けをしていることに注意したい. それを一般化して, 集合 A , B に対して, 二項関係 \sim を

$$A \sim B \iff A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

によって定義する. 容易に, \sim は同値関係であることが確認できる. m 以下の自然数の集合を $\mathbb{N}(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$ とし, $A \sim \mathbb{N}(m)$ が成り立つ場合を考えると, A の各要素は $\mathbb{N}(m)$ の要素と対応付けられ, 逆に $\mathbb{N}(m)$ の各要素は A の要素と対応付けられている. 集合 A の要素の数を $\text{card}(A)$ で表すと, $\text{card}(A) = m$ となる. 集合 A, B の要素の数の大小関係 \leq について,

- (1) $\text{card}(A) = \text{card}(B) \iff A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する,}$
- (2) $\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \iff A \text{ から } B \text{ への単射が存在する,}$
- (3) $\text{card}(A) < \text{card}(B) \iff \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \text{ かつ } \text{card}(A) \neq \text{card}(B) \text{ がなりたつ,}$

により定める. ■