統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2010 年 10 月 27 日

● 任意の $A,\ B \in \mathcal{F}$ に対して，次が成り立つことを示せ.

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(3) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad P(A) \le P(B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(解) (1)： $\Omega \cup \varnothing = \Omega,\ \Omega \cap \varnothing = \varnothing$ より $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$ であるから，$P(\varnothing) = 0$ となる．(2)： $A \cup A^c = \Omega,\ A \cap A^c = \varnothing$ より $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ であるから，$P(A^c) = 1 - P(A)$ となる．(3)：$C = B \cap A^c$ とおくと，$C \in \mathcal{F},\ B = A \cup C,\ A \cap C = \varnothing$ であり，$P(C) \ge 0$ であるから，

$$P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) \ge P(A)$$

が得られる．(4)： $C = A \cap B,\ D = A \cap B^c,\ E = A^c \cap B$ とおくと，

$$\begin{gathered} A = C \cup D, \qquad B = C \cup E, \qquad A \cup B = C \cup D \cup E, \\ C \cap D = \varnothing, \qquad C \cap E = \varnothing, \qquad D \cap E = \varnothing \end{gathered}$$

であり，

$$P(A) = P(C \cup D) = P(C) + P(D), \qquad P(B) = P(C \cup E) = P(C) + P(E)$$

となる．分配法則を用いて

$$(C \cup D) \cap E = (C \cap E) \cup (D \cap E) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

が成り立つので，

$$P(A \cup B) = P((C \cup D) \cup E) = P(C \cup D) + P(E) = P(C) + P(D) + P(E)$$

である．したがって，

$$P(A \cup B) = P(C) + (P(A) - P(C)) + (P(B) - P(C)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

となる． ■