統計学概論・確率論 (221710/224940)　解答例

2010 年 10 月 20 日

● 自然数 n，m に対して，次が成り立つことを証明せよ．

(1) $m\,{}_nC_m = n\,{}_{n-1}C_{m-1}$

(2) ${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

(3) ${}_{n+1}C_{m+1} = {}_mC_m + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_nC_m$

(解) (1)，(2)： $n! = n\,(n-1)!$ より

$$
\begin{aligned}
m\,{}_nC_m =& m \cdot \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = m \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot (n-m)!} \\
=& n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot \{(n-1)-(m-1)\}!} = n\,{}_{n-1}C_{m-1}, \\
{}_nC_m =& \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{(n-m) \cdot (n-1)!}{m! \cdot (n-m)!} + \frac{m \cdot (n-1)!}{m! \cdot (n-m)!} \\
=& \frac{(n-1)!}{m! \cdot (n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot (n-m)!} = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}
\end{aligned}
$$

となる．

(3)： (2) を帰納的に適用し，${}_{m+1}C_{m+1} = 1 = {}_mC_m$ であることを用いると，

$$
\begin{aligned}
{}_{n+1}C_{m+1} =& {}_nC_{m+1} + {}_nC_m = {}_{n-1}C_{m+1} + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m \\
=& {}_{n-2}C_{m+1} + {}_{n-2}C_m + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m = \cdots \\
=& {}_{m+1}C_{m+1} + {}_{m+1}C_m + {}_{m+2}C_m + \cdots + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m \\
=& {}_mC_m + {}_{m+1}C_m + {}_{m+2}C_m + \cdots + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m
\end{aligned}
$$

となる． ■