統計学概論・確率論 (221710/224940)　課題　解答例

2010.12.24

$\boxed{1}$ 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，その確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

で与えられる．このとき，期待値 $E[X]$ は $E[X] = \mu$，分散 $V[X]$ は $V[X] = \sigma^2$ であることを示せ．ただし，$E[X]$ と $V[X]$ はそれぞれ

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx, \qquad V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2\, f(x)\, dx$$

で定める．

（解） $f(x)$ は $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ をみたし，各非負の整数 k に対して

$$\lim_{x\to-\infty} x^k f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0 \tag{1}$$

が成り立つことに注意したい．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\, f(x) \tag{2}$$

となるので，(2) の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} 0 = [f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, dx &= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2}\,(E[X] - \mu) \end{aligned}$$

が得られる．したがって，$E[X] = \mu$ である．また，(1)，(2) と部分積分法より，

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)\left(-\sigma^2 f'(x)\right) dx \\ &= -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)\, f'(x)\, dx = -\sigma^2 \left\{ [(x-\mu)\, f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

となる．■