●母平均 μ，母分散 σ^2 の正規母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とするとき，$\theta=\sigma^2$ の最尤推定量を求めよ．

（解答例）　$\theta \geq 0$ の範囲で考えればよい．尤度関数 $\ell(x_1,\cdots,x_n,\theta)$ は

$$\ell(x_1,\cdots,x_n,\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\theta^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\,\theta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}$$

であるから，対数尤度関数 $L(x_1,\cdots,x_n,\theta)$ は

$$L(x_1,\cdots,x_n,\theta)=-n\,\log\sqrt{2\,\pi}-\frac{n}{2}\,\log\theta-\frac{1}{2\,\theta}\,\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

となる．θ で偏微分すると

$$\frac{\partial L(x_1,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{2\,\theta}+\frac{1}{2\,\theta^2}\,\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=-\frac{n}{2\,\theta^2}\,\left\{\theta-\frac{1}{n}\,\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2\right\}$$

となり，$L(x_1,\cdots,x_n,\theta)$ は

$$\theta=\frac{1}{n}\,\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2\geq 0$$

で最大値をとる．したがって，分散 σ^2 の最尤推定量は

$$\frac{1}{n}\,\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$$

である．