●母平均 μ，母分散 σ^2 の正規母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

とおく．

(1) $V[\bar{X}]$ を求めよ．

(2) 母平均 μ に関するフィッシャー情報量 $I(\mu)$ を求めよ．

(3) $V[\bar{X}] = \dfrac{1}{n\,I(\mu)}$ が成り立つことを示せ．

（解答例）　(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n は無作為標本であるから，互いに独立であることに注意すると，

$$V[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V[X_k] = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる．(2) 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数 $f(x,\mu)$ は

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

であるから，

$$\log f(x,\mu) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\right)$$

となる．

$$\frac{\partial \log f(x,\mu)}{\partial \mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}, \qquad \frac{\partial^2 \log f(x,\mu)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

より

$$I(\mu) = -E\left[\frac{\partial^2 \log f(x,\mu)}{\partial \mu^2}\right] = -E\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\,E[1] = \frac{1}{\sigma^2}$$

である．(3) 上記の計算結果から

$$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n\cdot\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{1}{n\,I(\mu)}$$

が成り立つ．