●母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．また，$w_k \in \mathbb{R}$ （$k=1$，$\cdots$，n）は

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1 \tag{*}$$

をみたすようにとる．このとき，

$$\hat{\theta} = \sum_{k=1}^{n} w_k \, X_k$$

の分散 $V[\hat{\theta}]$ を求め，それを最小にする w_k （$k=1$，$\cdots$，n）を求めよ．

（解答例）　X_1，X_2，$\cdots$，X_n は無作為標本であるから，互いに独立であることに注意すると，分散の性質より

$$V[\hat{\theta}] = V\left[\sum_{k=1}^{n} w_k \, X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 \, V[X_k] = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} w_k^2$$

となる．また，$V[\hat{\theta}]$ を最小にするためには，$\sum_{k=1}^{n} w_k^2$ を最小にすればよい．

$$\sum_{k=1}^{n} \left(w_k - \frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 - \frac{1}{n}$$

より

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(w_k - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}$$

である．したがって，$w_k = 1/n$ （$k=1$，$\cdots$，n）は条件 (*) をみたし，そのとき $\sum_{k=1}^{n} w_k^2$ は最小となる．