●母平均 μ，母分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本を X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．このとき，標本平均 $\bar{X}$ に対して $E[\bar{X}]=\mu$，$V[\bar{X}]=\sigma^2/n$ が成り立つことを示せ．

（解答例）　X_1，X_2，$\cdots$，X_n は無作為標本であるから，互いに独立である．したがって，各 k，ℓ （$k \neq \ell$）に対して，$E[X_k\,X_\ell]=E[X_k]\,E[X_\ell]$ が成り立つので，

$$E[(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)]=E[X_k\,X_\ell-\mu\,X_k-\mu\,X_\ell+\mu^2]=E[X_k]\,E[X_\ell]-\mu\,E[X_k]-\mu\,E[X_\ell]+\mu^2=0$$

が得られる．期待値の性質より

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}] =& E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E[X_k]=\mu, \\
V[\bar{X}] =& E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right)^2\right]=E\left[\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right\}^2\right] \\
=& \frac{1}{n^2}\,E\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell\neq k}(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)\right] \\
=& \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}E[(X_k-\mu)^2]+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell\neq k}E[(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)]\right\}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V[X_k]=\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

となる．