●データ (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n) が与えられているとき，次の関数を最小にする a，b を求めよ．

$$f(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\{y_k-(a\,x_k+b)\}^2$$

ただし，データには異なるものが含まれているとする．

（解答例）　$\bar{x}$，$\bar{y}$，s_{xx}，s_{xy}，s_{yy} をそれぞれ

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k,\qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k,\qquad s_{xx}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2,$$
$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})\,(y_k-\bar{y}),\qquad s_{yy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2$$

とおく．展開して整理しなおすことにより

$$s_{xx}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\bar{x}^2,\qquad s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\,y_k-\bar{x}\,\bar{y},\qquad s_{yy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k^2-\bar{y}^2$$

が得られる．

$$\begin{aligned}g(a,b)=\frac{f(a,b)}{n}=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k^2+a^2\,x_k^2+b^2-2\,a\,x_k\,y_k+2\,a\,b\,x_k-2\,b\,y_k\right)\\=&\left(s_{yy}+\bar{y}^2\right)+a^2\,\left(s_{xx}+\bar{x}^2\right)+b^2-2\,a\,\left(s_{xy}+\bar{x}\,\bar{y}\right)+2\,a\,b\,\bar{x}-2\,b\,\bar{y}\end{aligned}$$

より，$g(a,b)$ を最小にする (a,b) を求めればよい．$g(a,b)$ を最小にする (a,b) は

$$0=\tfrac{\partial}{\partial a}g(a,b)=2\,a\,\left(s_{xx}+\bar{x}^2\right)+2\,b\,\bar{x}-2\,\left(s_{xy}+\bar{x}\,\bar{y}\right),\qquad 0=\tfrac{\partial}{\partial b}g(a,b)=2\,a\,\bar{x}+2\,b-2\,\bar{y}$$

をみたす．異なるデータが含まれているため $s_{xx}>0$ であるから，

$$a=\frac{s_{xy}}{s_{xx}},\qquad b=\frac{\bar{y}\,s_{xx}-\bar{x}\,s_{xy}}{s_{xx}}$$

で最小値をとる．