● $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ であることを示せ．

（解答例）　$0 \leq x \leq \pi/2$ のとき，$0 \leq \sin x \leq 1$ であるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ が成り立つ．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $I_n \geq I_{n+1}$ である．また，数列 $\{I_n\}$ は漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad n \geq 3$$

をみたすので，$n \geq 2$ のとき

$$1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

となる．はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ である．

● $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = 1$ であることを示せ．

（解答例）　$I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$ と表現できるので，

$$\frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{(n+1)\,\Gamma(\frac{n+1}{2})^2}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{2\,(n+1)\,\Gamma(\frac{n+1}{2})^2}{n^2\,\Gamma(\frac{n}{2})^2}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}}} = 1$$

が得られる．