●自由度 n の χ^2 分布の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1} & (x \geq 0) \\ 0 \quad (x < 0) \end{cases}$$

のグラフの概形をかけ.

（解答例）　$x > 0$ の範囲のみを考える．このとき，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ であり，

$$f'(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1} + e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{n}{2}-1\right) x^{\frac{n}{2}-2} \right\} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}+1}\,\Gamma(\frac{n}{2})} (n-2-x)$$

となる．(1) $n = 1$ または $n = 2$ のときには，$x > 0$ の範囲で $f(x)$ は単調減少である．(2) $n \geq 3$ のときには，$f(x)$ は $0 < x < n-2$ の範囲で単調増加，$x > n-2$ の範囲で単調減少である．$x = n-2$ において最大値を取る．下のグラフは $n = 1$，$n = 2$，$n = 3$，$n = 5$ に対する $f(x)$ のグラフである．