

●確率変数 X_j ($1 \leq j \leq n$) は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、互いに独立であるとする。このとき、

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2$$

は自由度 n の χ^2 分布に従うことを示せ。

(解答例) $Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1^2)$ より、 Y_j^2 は自由度 1 の χ^2 分布に従う。独立性と χ^2 分布の再生性より、

$$\sum_{j=1}^n Y_j^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2$$

は自由度 n の χ^2 分布に従う。