● c を 0 でない実定数とし，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とするとき，$Y = c\,X$ はどのような分布に従うか？

（解答例）　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

と表せることに注意したい．$c > 0$ のときには

$$P(Y \leq y) = P(c\,X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y}{c}} f(x)\,dx$$

より，Y の確率密度関数 $g(y)$ は

$$g(y) = \frac{1}{c}\,f\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{c^2\,\sigma^2}}\,e^{-\frac{(y-c\,\mu)^2}{2\,c^2\,\sigma^2}}$$

となり，$Y \sim N(c\,\mu, c^2\,\sigma^2)$ である．$c < 0$ のときには

$$P(Y \leq y) = P\left(X \geq \frac{y}{c}\right) = \int_{\frac{y}{c}}^{+\infty} f(x)\,dx$$

より，

$$g(y) = -\frac{1}{c}\,f\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(-c)\,\sigma}\,e^{-\frac{(y-c\,\mu)^2}{2\,c^2\,\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{c^2\,\sigma^2}}\,e^{-\frac{(y-c\,\mu)^2}{2\,c^2\,\sigma^2}}$$

となり，$Y \sim N(c\,\mu, c^2\,\sigma^2)$ である．以上をまとめると，$c \neq 0$ のとき $Y = c\,X \sim N(c\,\mu, c^2\,\sigma^2)$ である．