●標準正規分布 $N(0,1^2)$ の $k$ 次モーメント $E[X^k]$ を求めよ．

（解答例１）　標準正規分布の確率密度関数 $\phi(x)$ は $\phi'(x) = -x\,\phi(x)$ をみたし，すべての整数 $k$ に対して

$$\lim_{x\to-\infty}\{x^k\,\phi(x)\} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\{x^k\,\phi(x)\} = 0$$

であることに注意したい．部分積分法により

$$\begin{aligned}
E[X] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)\,dx = 0,\\
E[X^2] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\phi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,dx = 1,\\
E[X^k] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\,\phi'(x)\,dx = (k-1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2}\,\phi(x)\,dx = (k-1)\,E[X^{k-2}] \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}$$

である．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
E[X^{2n-1}] =& (2n-2)\,E[X^{2n-3}] = \cdots = (2n-2)\,(2n-4)\cdots 2\,E[X] = 0,\\
E[X^{2n}] =& (2n-1)\,E[X^{2n-2}] = \cdots = (2n-1)\,(2n-3)\cdots 3\,E[X^2] = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}
\end{aligned}$$

が得られる．

（解答例２）　標準正規分布の積率母関数が $m_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ と表されることに注意すると，指数関数のマクローリン展開

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

より

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!\cdot 2^k}$$

となる．$E[X^n] = m_X^{(n)}(0)$　$(n \in \mathbb{N})$ より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[X^{2n-1}] = 0, \qquad X[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$$

である．