応用数学 I　試験問題　解答例

2010 年 8 月 20 日

$\boxed{1}$ $X \sim B\left(50000, \dfrac{1}{6}\right)$ より

$$E[X] = 50000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{50000}{6}, \qquad \sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{50000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{500}{6}$$

である．$n = 50000$ が大きな数と考え，

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]}$$

による正規近似を用いる．

(1) 標準正規分布の対称性より

$$P(X \geq 8250) = P(Z \geq -1.0) = P(Z \leq 1.0) = 0.8413$$

である．

(2) 定積分の性質と標準正規分布の対称性より

$$\begin{aligned} P(8300 \leq X \leq 8400) =& P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \geq -0.4) - P(Z \geq 0.8) \\ =& P(Z \leq 0.4) - (1 - P(Z \leq 0.8)) = P(Z \leq 0.4) + P(Z \leq 0.8) - 1 \\ =& 0.6554 + 0.7881 - 1 = 0.4435 \end{aligned}$$

である．

(3) 数値表より $z(0.6) \fallingdotseq 0.255$ であるから，

$$\frac{n - E[X]}{\sigma[X]} = z(0.6) \qquad \Longrightarrow \qquad n \fallingdotseq 8354.58$$

が得られ，$n = 8355$ である．

$\boxed{2}$ 期待値の線形性より

$$E\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \frac{n\,\mu}{n} = \mu$$

である．X_1，X_2，$\cdots$，X_n は無作為標本，つまり，互いに独立だから，$k \neq \ell$ のとき

$$E\left[(X_k - \mu)(X_\ell - \mu)\right] = 0$$

が成り立つ．期待値の線形性と

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} (X_\ell - \mu)$$

より

$$E\left[(X_k-\mu)(\bar{X}-\mu)\right]=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}E\left[(X_k-\mu)(X_\ell-\mu)\right]=\frac{1}{n}E\left[(X_k-\mu)^2\right]=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu)(\bar{X}-\mu)\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}E\left[U^2\right]&=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\bar{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}E\left[\{(X_k-\mu)-(\bar{X}-\mu)\}^2\right]\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{E\left[(X_k-\mu)^2\right]-2\,E\left[(X_k-\mu)(\bar{X}-\mu)\right]+E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]\right\}\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma^2-2\,\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\,\sigma^2}{n}=\sigma^2\end{aligned}$$

となる．

$\boxed{3}$ 不偏分散 U^2 は

$$U^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k^2-2\,X_k\,\bar{X}+\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2-n\,\bar{X}^2\right)$$

と表されることに注意したい．与えられたデータ x_1，x_2，$\cdots$，x_{10} から

$$\sum_{k=1}^{10}x_k=1673.6,\qquad \sum_{k=1}^{10}x_k^2=281059.34$$

となるので，

$$\bar{x}=\frac{1673.6}{10}=167.36,\qquad u^2=\frac{1}{10-1}\left(281059.34-10\cdot167.36^2\right)\fallingdotseq 107.29$$

が得られる．

(1) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ であるから，$z_0=z\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)$ とおくと，母平均に対する信頼係数 α の信頼区間は

$$\bar{X}-z_0\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+z_0\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

であるから，$z(0.975)=1.96$ より

$$161.16\fallingdotseq 167.36-1.96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\le\mu\le 167.36+1.96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\fallingdotseq 173.56$$

となるので，求める信頼区間は $[161.16,173.56]$ である．

(2) $\dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{U^2}}\sim t_{n-1}$ であるから，$t_0=t_{n-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)$ とおくと，母平均に対する信頼係数 α の信頼区間は

$$\bar{X}-t_0\sqrt{\frac{U^2}{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_0\sqrt{\frac{U^2}{n}}$$

であるから，$t_9(0.025) = 2.26$ より

$$159.95 \fallingdotseq 167.36 - 2.26 \cdot \sqrt{\frac{107.29}{10}} \leq \mu \leq 167.36 + 2.26 \cdot \sqrt{\frac{107.29}{10}} \fallingdotseq 174.76$$

となるので，求める母平均の信頼区間は $[159.95, 174.76]$ である．

(3) $\dfrac{(n-1)\,U^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}$ であるから，$\chi_- = \chi_{n-1}\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)$，$\chi_+ = \chi_{n-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)$ とおくと，母分散に対する信頼係数 α の信頼区間は

$$\frac{(n-1)\,U^2}{\chi_+} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,U^2}{\chi_-}$$

であるから，$\chi_9(0.025) = 19.02$，$\chi_9(0.975) = 2.70$ より

$$50.76 \fallingdotseq \frac{9 \cdot 107.29}{19.02} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \cdot 107.29}{2.70} \fallingdotseq 357.63$$

となるので，求める母分散の信頼区間は $[50.76, 357.63]$ である．