確率統計学 1　課題　解答例

2020.12.23

$\boxed{1}$　a，b，μ，σ を実定数とし，$a < b$，$\sigma > 0$ と仮定する．関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (x \in (a,b)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

により定義するとき，積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, g(x)\, dx$$

を求めよ．必要があれば，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = 1$$

であることを用いても良い．

(解) 多項式の積分により

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2\,(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{a+b}{2},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, g(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^3}{3\,(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{a^2+a\,b+b^2}{3}$$

となる．すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して $e^z \geq 1 + z$ であることに注意したい．$z \to +\infty$ のとき

$$0 \leq z\, e^{-z^2/2} = \frac{z}{e^{z^2/2}} \leq \frac{z}{1 + z^2/2} \to 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{z \to -\infty} \left(z\, e^{-z^2/2}\right) = 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} \left(z\, e^{-z^2/2}\right) = 0$$

となり，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \sqrt{2\pi},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-z^2/2}\, dz = \left[-e^{-z^2/2}\right]_{z=-\infty}^{z=+\infty} = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\, e^{-z^2/2}\, dz = \left[z\left(-e^{-z^2/2}\right)\right]_{z=-\infty}^{z=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-e^{-z^2/2}\right) dz = \sqrt{2\pi}$$

が得られる．変数変換 $z = (x - \mu)/\sigma$ により

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma\, z)\, \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\,\pi}}\, dz \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z\, e^{-z^2/2} \right) dz = \mu, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma\, z)^2\, \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\,\pi}}\, dz \\
&= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{2\,\mu\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z\, e^{-z^2/2} \right) dz \\
&\qquad + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z^2\, e^{-z^2/2} \right) dz = \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

となる． ■