確率統計学 1　課題　解答例

2020.12.16

$\boxed{1}$　$n \in \mathbb{N}$ に対して，I_n を

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

により定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 を求めよ．

(2) I_{n+2} を n，I_n を用いて表せ．

(3) I_n を n を用いて表せ．

(解) (1)

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1,$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

となる．(2) 部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \, dx \\ &= \Big[(-\cos x) \cdot \sin^{n+1} x \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x) \cdot \{ (n+1) \, \sin^n x \cos x \} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^n x \, (1 - \sin^2 x) \, dx = (n+1) \, I_n - (n+1) \, I_{n+2} \end{aligned}$$

が得られ，I_{n+2} は

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \, I_n$$

と表せる．(3) 問 (1)，(2) より，$n = 2\,m$ （$m \in \mathbb{N}$）のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2\,m-1}{2\,m} \, I_{n-2} = \frac{2\,m-1}{2\,m} \, \frac{2\,m-3}{2\,(m-1)} \, I_{n-4} = \cdots = \frac{2\,m-1}{2\,m} \, \frac{2\,m-3}{2\,(m-1)} \cdots \frac{3}{4} \, I_2 \\ &= \frac{2\,m-1}{2\,m} \, \frac{2\,m-3}{2\,(m-1)} \cdots \frac{3}{4} \, \frac{1}{2} \, \frac{\pi}{2} = \frac{(2\,m)!}{(2^m \, m!)^2} \, \frac{\pi}{2} = \frac{n!}{2^n \, \{(n/2)!\}^2} \, \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であり，$n = 2\,m - 1$ （$m \in \mathbb{N}$）のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2\,(m-1)}{2\,m-1} \, I_{n-2} = \frac{2\,(m-1)}{2\,m-1} \, \frac{2\,(m-2)}{2\,m-3} \, I_{n-4} = \cdots = \frac{2\,(m-1)}{2\,m-1} \, \frac{2\,(m-2)}{2\,m-3} \cdots \frac{2}{3} \, I_1 \\ &= \frac{2\,(m-1)}{2\,m-1} \, \frac{2\,(m-2)}{2\,m-3} \cdots \frac{2}{3} = \frac{\{2^{m-1} \, (m-1)!\}^2}{(2\,m-1)!} = \frac{2^{n-1} \, [\{(n-1)/2\}!]^2}{n!} \end{aligned}$$

である．■