確率統計学１　課題　解答例

2020.11.25

$\boxed{1}$　$n \in \mathbb{N}$，$p \in (0,1)$ とし，次の試行を 2 回行う．

1. 積み木が積まれていない状態から始める．
2. 表が出る確率が p，裏が出る確率が $(1-p)$ である歪んだコインを投げ，表が出たら，積まれている積み木の上に 1 段積み木を積む，裏が出たら，積まれた積み木をすべて取り去るという操作を n 回繰り返す．

1 回目および 2 回目の試行終了後の積み木の段数をそれぞれ X，Y とするとき，確率 $P(X=k)$（$k=0$，1，2，$\cdots$，n）および $P(X \leq Y)$ を求めよ．

(解) 確率 $P(X=k)$ は

$$P(X=k)=\begin{cases}(1-p)\,p^k & (0 \leq k < n)\\ p^n & (k=n)\end{cases}$$

である．また，$0 \leq k < n$ に対して

$$P(X \leq k)=\sum_{\ell=0}^{k} P(X=\ell)=\sum_{\ell=0}^{k}(1-p)\,p^{\ell}=(1-p)\cdot\frac{1-p^{k+1}}{1-p}=1-p^{k+1}$$

が得られ，$P(X \leq n)=1$ である．1 回目は 2 回目の試行に影響を与えないので，任意の k に対して $P(X=k)=P(Y=k)$ であり，

$$\begin{aligned}P(X \leq Y) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} P(X \leq \ell \wedge Y=\ell)+P(X \leq n \wedge Y=n)\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} P(X \leq \ell)P(Y=\ell)+P(X \leq n)\,P(Y=n)\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\{(1-p)\,(1-p^{\ell+1})\,p^{\ell}\}+p^n=(1-p)\sum_{\ell=0}^{n-1}(p^{\ell}-p^{2\,\ell+1})+p^n\\ &= (1-p)\left(\frac{1-p^n}{1-p}-p\cdot\frac{1-p^{2\,n}}{1-p^2}\right)+p^n=\frac{1+p^{2\,n+1}}{1+p}\end{aligned}$$

となる．■