

確率統計学 1 課題 解答例

2020.11.11

1 n を $n \geq 3$ をみたす自然数とする. 正 n 角形の頂点の中から起点 O を定め, 最初の時点で動点 P は起点 O の上にあり, コインを繰り返し投げ, コインを投げるごとに, 動点 P は反時計回りに正 n 角形の頂点を, 表が出たら 2 つ, 裏が出たら 1 つ進む. このとき, 次の確率を求めよ.

(1) 動点 P が 1 周してきたとき起点 O を踏む確率

(2) 動点 P が 1 周目には起点 O を飛越え, 2 周目には起点 O を踏む確率

(解) 起点 O から反時計回りに数えて k 番目の点を踏む確率を p_k とする. このとき, $(1 - p_k)$ は起点 O から反時計回りに数えて k 番目の点を飛越える確率であることに注意すると, 動点 P が $(k + 1)$ 番目の点を飛越えるためには, 動点 P が k 番目の点にいて, コインを投げたとき表が出ればよい. したがって, 各 k に対して関係式

$$1 - p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k, \quad \text{つまり, } p_{k+1} = 1 - \frac{p_k}{2}$$

が得られる. $p_0 = 1$ と

$$p_k - \frac{2}{3} = \left(1 - \frac{p_{k-1}}{2}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(p_{k-1} - \frac{2}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

より

$$p_k = \frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

が得られる.

(1): 起点 O は n 番目の頂点に対応するので, 求める確率は p_n である.

(2): 動点 P が起点 O から数えて n 番目の頂点を飛越える確率は $(1 - p_n)$ であり, このときには $(n + 1)$ 番目の点を踏んでいる. また, $(n + 1)$ 番目の点を起点と考え直すと, 2 周目の起点 O は考え直した起点から数えて $(n - 1)$ 番目の点に対応する. したがって, 求める確率は

$$(1 - p_n) p_{n-1} = \frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^2$$

である. ■