確率統計学１　課題　解答例

2020.10.28

$\boxed{1}$ 数直線上を動く動点 P は最初原点（$x=0$）にいる．

(a) コインを投げ，表が出たら P は右へ $+1$ 進み，裏が出たら P は左へ $+1$ 進む．

(b) P が $x=-3$ または $x=3$ に辿り着くまで，操作 (a) を繰り返し，辿り着いた時点でコインを投げるのをやめ，すべての操作を終了する．

このとき，次を求めよ．

(1) コインを 5 回投げた後にちょうど終了する確率

(2) 自然数 n に対して，コインを n 回投げた後にちょうど終了する確率

(解) コインを n 回投げた直後に終了し，コインを k 回投げた直後に P が $x=-2$，$x=-1$，$x=0$，$x=1$，$x=2$ にいる確率をそれぞれ p_k，q_k，r_k，s_k，t_k とする．このとき，

$$p_0=0, \qquad q_0=0, \qquad r_0=1, \qquad s_0=0, \qquad t_0=0$$

であり，$0 \leq k < n-1$ をみたす自然数 k に対して

$$p_{k+1}=\frac{q_k}{2}, \qquad q_{k+1}=\frac{p_k+r_k}{2}, \qquad r_{k+1}=\frac{q_k+s_k}{2}, \qquad s_{k+1}=\frac{r_k+t_k}{2}, \qquad t_{k+1}=\frac{s_k}{2}$$

がみたされ，

$$p_1=0, \qquad q_1=\frac{1}{2}, \qquad r_1=0, \qquad s_1=\frac{1}{2}, \qquad t_1=0$$

である．また，$u_k=p_k-t_k$，$v_k=q_k-s_k$ とおくと，$u_0=0$，$u_1=0$，$v_0=0$，

$$\begin{aligned}
u_{k+2}&=p_{k+2}-t_{k+2}=\frac{q_{k+1}}{2}-\frac{s_{k+1}}{2}=\frac{p_k+r_k}{4}-\frac{r_k+t_k}{4}=\frac{u_k}{4}, \qquad && 0 \leq k < n-2,\\
v_{k+1}&=q_{k+1}-s_{k+1}=\frac{p_k+r_k}{2}-\frac{r_k+t_k}{2}=\frac{u_k}{2}, && 0 \leq k < n-1
\end{aligned}$$

より

$$u_k=0, \qquad v_k=0, \qquad 0 \leq k < n-1$$

である．このとき，$r_{k+1}=q_k$ であるから，$\{q_k\}$ は

$$q_{k+2}=\frac{p_{k+1}+r_{k+1}}{2}=\frac{3\,q_k}{4}, \qquad 0 \leq k < n-1$$

をみたし，$0 \leq k < n-1$ をみたす自然数 k に対して

$$q_k=s_k=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{(k-1)/2} & (k:\ \text{奇数}) \\ 0 & (k:\ \text{偶数}) \end{cases}$$

と表せる．

n 回投げた後にちょうど終了する確率は

$$w_n = \frac{1}{2} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot t_{n-1} = p_{n-1} = \frac{q_{n-2}}{2}, \qquad n \geq 2$$

である．ここで，2 回までに $x = -3$ または $x = 3$ に到達することはできないので，$w_0 = 0$, $w_1 = 0$ である．例えば，5 回投げた後にちょうど終了する確率は

$$w_5 = \frac{q_3}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{(3-1)/2} \right\} = \frac{3}{16}$$

となる． ■