確率統計学１　課題　解答例

2020.10.14

$\boxed{1}$　n を自然数とし，次の試行を 2 回行う．

(1) 積み木をすべて取り去り，積木が積まれていない状態にする．

(2) コインを投げ，表が出たら，1 段積み木を積む，裏が出たら，積まれた積み木をすべて取り去る，という操作を繰り返し n 回行う．

$j = 1$，2 に対して，j 回目の試行終了直後に積み木が積まれている段数を X_j とするとき，積木が 1 回目より 2 回目の方が多く積まれている確率 $P(X_1 < X_2)$ を求めよ．

(解) 各 j に対して，

$$P(X_j = k) = \begin{cases} 2^{-(k+1)} & (k < n) \\ 2^{-n} & (k = n) \end{cases}$$

であるから，

$$1 = \sum_{\ell=0}^{k} P(X_j = \ell) + \sum_{\ell=k+1}^{n} P(X_j = \ell), \qquad 0 \leq k < n$$

より

$$\sum_{\ell=k+1}^{n} P(X_j = \ell) = 1 - \sum_{\ell=0}^{k} 2^{-(\ell+1)} = 1 - 2^{-1} \cdot \frac{1 - 2^{-(k+1)}}{1 - 2^{-1}} = 2^{-(k+1)}, \qquad 0 \leq k < n$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \sum_{0 \leq k < \ell \leq n} P(X_1 = k, X_2 = \ell) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} \{P(X_1 = k) P(X_2 = \ell)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ P(X_1 = k) \sum_{\ell=k+1}^{n} P(X_2 = \ell) \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ 2^{-(k+1)} \cdot 2^{-(k+1)} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 4^{-(k+1)} = 4^{-1} \cdot \frac{1 - 4^{-n}}{1 - 4^{-1}} = \frac{1 - 4^{-n}}{3} \end{aligned}$$

となる．■