

確率統計学概論 課題 解答例

2020.07.29

問題1 500 人が受験した模擬試験の得点の平均は 60 点、標準偏差は 20 点であった。得点の分布が正規分布と見なせるとき、次の問に答えよ。

- (1) 得点が 70 点から 90 点までの受験者は約何人いるかを調べよ。
- (2) 得点上位 20 番以内に入るためには何点以上取る必要があるか調べよ。

(解) 模擬試験の得点を X とすると、 X は $N(60, 20^2)$ に従うので、

$$Z = \frac{X - 60}{20}$$

が $N(0, 1^2)$ に従う。(1)

$$\begin{aligned} P(70 \leq X \leq 90) &= P(69.5 \leq X \leq 90.5) = P\left(\frac{69.5 - 60}{20} \leq Z \leq \frac{90.5 - 60}{20}\right) \\ &= P(0.475 \leq Z \leq 1.525) = P(Z \leq 1.525) - P(Z \leq 0.475) = 0.9363 - 0.6826 = 0.2537 \end{aligned}$$

より $500 \cdot 0.2537 = 126.85$ となり、約 126 人である。(2) 上位から 21 番目の人の得点を C 点とすると、

$$0.96 = 1 - \frac{20}{500} = P(X \leq C) = P(X \leq C + 0.5) = P\left(Z \leq \frac{C + 0.5 - 60}{20}\right)$$

であり、正規分布表により

$$\frac{C + 0.5 - 60}{20} \doteq 1.751, \quad \text{つまり, } C = 94.52$$

となる。したがって、95 点以上必要である。■

問題2 さいころを 3600 回投げるとき、1 の目が出た回数が 590 回から 610 回までである確率を求めよ。

(解) さいころを 3600 回投げるとき 1 の目が出た回数を X とすると、 X は $B(3600, 1/6)$ に従うので、期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ はそれぞれ

$$E[X] = 3600 \cdot \frac{1}{6} = 600, \quad V[X] = 3600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 500$$

となる。3600 回を大きな数と考え、ドモアブル・ラプラスの定理より

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}} = \frac{X - 600}{\sqrt{500}}$$

は正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うと見なせる。したがって、

$$\begin{aligned} P(590 \leq X \leq 610) &= P(589.5 \leq X \leq 610.5) \doteq P\left(\frac{589.5 - 600}{\sqrt{500}} \leq Z \leq \frac{610.5 - 600}{\sqrt{500}}\right) \\ &\doteq P(-0.4695 \leq Z \leq 0.4695) = 2P(0 \leq Z \leq 0.4695) \\ &= 2(P(Z \leq 0.4695) - P(Z \leq 0)) \doteq 2 \cdot (0.6808 - 0.5) = 0.3616 \end{aligned}$$

である。■