確率統計学概論　課題　解答例

2020.07.22

問題１　ある会社は製品全体の 40% を工場 A で，そのほかを工場 B で生産している．また，検査により，工場 A で生産した製品の内 0.2%，工場 B で生産した製品の内 0.1% が不良品であることが分かっている．このとき，検査で不良品を見つけたとき，それが工場 B で生産されたものである確率を求めよ．

（解） U を工場 A で生産された製品であるという事象，V を不良品であるという事象とすると，

$$P(U) = \frac{4}{10}, \qquad P(U^c) = \frac{6}{10}, \qquad P(V \,|\, U) = \frac{2}{1000}, \qquad P(V \,|\, U^c) = \frac{1}{1000}$$

となり，求める確率は $P(U^c \,|\, V)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} P(U^c \,|\, V) &= \frac{P(U^c \cap V)}{P(V)} = \frac{P(U^c \cap V)}{P(U \cap V) + P(U^c \cap V)} \\ &= \frac{P(V \,|\, U^c)\, P(U^c)}{P(V \,|\, U)\, P(U) + P(V \,|\, U^c)\, P(U^c)} = \frac{\dfrac{1}{1000} \cdot \dfrac{6}{10}}{\dfrac{2}{1000} \cdot \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{1000} \cdot \dfrac{6}{10}} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

である．■

問題２　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．この n 枚のカードから一度に 2 枚選び，大きい方の数字を X とする．この試行に対応する標本空間 Ω を構成し，確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{N}$ を定義せよ．また，X の期待値 $E[X]$ を求めよ．

（解） 標本空間 Ω と確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{N}$ をそれぞれ

$$\Omega = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : k \neq \ell\}, \qquad X((k, \ell)) = \max(k, \ell) \quad ((k, \ell) \in \Omega)$$

となる．また，

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{(k,\ell) \in \Omega} \max(k, \ell) \cdot \frac{1}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{\ell=2}^{n} \sum_{k=1}^{\ell-1} \ell = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{\ell=2}^{n} \ell\,(\ell-1) \\ &= \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\,(\ell-1) = \frac{2}{n\,(n-1)} \left\{ \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} - \frac{n\,(n+1)}{2} \right\} = \frac{2\,(n+1)}{3} \end{aligned}$$

である．■

問題３　公平なコインを 3 回投げる．1 回目と 2 回目が同じ目である事象を A，2 回目と 3 回目が同じ目である事象を B，3 回目と 1 回目が同じである事象を C とする．このとき，事象 A，B，C は独立であるか否か調べよ．

（解） 3 回とも同じ目である事象を D とすると，

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C = D,$$
$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

が得られ，

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

より事象 A，B，C は独立ではない． ■