確率統計学概論　課題　解答例

2020.07.15

問題１　$\mathcal{F}$ を Ω の σ 集合体とする．σ 集合体の定義に従って，任意の A，$B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cup B \in \mathcal{F}$，$A \cap B \in \mathcal{F}$ が成り立つことを示せ．

（解） $A_1 = A$，$A_2 = B$，$A_n = \varnothing$（$n \geq 3$）とおく．$\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{F}$ より，すべての自然数 n に対して $A_n \in \mathcal{F}$ であるから，

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

が成り立つ．また，A^c，$B^c \in \mathcal{F}$ であるから，上記より $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$ となり，

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

が得られる．■

問題２　$\mathcal{F}$ を Ω の σ 集合体とする．$\mathcal{F}$ の事象列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が包含関係において単調減少であるとき，任意の自然数 $n > m$ に対して

$$(A_n \setminus A_{n+1}) \cap (A_m \setminus A_{m+1}) = \varnothing$$

が成り立つことを示せ．

（解） $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が包含関係において単調減少であるから，$A_n \subset A_{m+1} \subset A_m$ が成り立つ．

$$\varnothing \subset A_n \cap A_{m+1}^c \subset A_{m+1} \cap A_{m+1}^c = \varnothing$$

より $A_n \cap A_{m+1}^c = \varnothing$ であるから，

$$\begin{aligned}(A_n \setminus A_{n+1}) \cap (A_m \setminus A_{m+1}) &= (A_n \cap A_{n+1}^c) \cap (A_m \cap A_{m+1}^c) \\ &= (A_n \cap A_{m+1}^c) \cap (A_{n+1}^c \cap A_m) = \varnothing \cap (A_{n+1}^c \cap A_m) = \varnothing\end{aligned}$$

となる．■

問題３　3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出た目の最大値が 5 である確率

(2) 出た目の最小値が 1 である確率

(3) 出た目の最大値が 5 であり，最小値が 1 である確率

（解） (1) 求める確率は，最大値が 5 以下であるという事象から，最大値が 4 以下であるという事象を取り除いてできる事象の確率であるから，

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$$

となる．(2) 求める確率は，最小値が 1 以上であるという事象から，最小値が 2 以上であるという事象を取り除いてできる事象の確率であるから，

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{91}{216}$$

となる．(3) 3 個のさいころの目は 1 の目，5 の目，x の目とおける．ただし，$1 \leq x \leq 5$ である．(a) $x = 1$ または $x = 5$ のときには，x について 2 通り，3 つの目の並べ方が 3 通りであるから，目の出方は $2 \cdot 3 = 6$ 通りである．(b) $2 \leq x \leq 4$ のときには，x について 3 通り，3 つの目の並べ方が $3! = 6$ 通りであるから，目の出方は $3 \cdot 6 = 18$ 通りである．したがって，求める確率は

$$\frac{6 + 18}{6^3} = \frac{1}{9}$$

である． ■