

確率統計学概論 課題 解答例

2020.07.08

問題 1 集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表すことにする. 集合 X とその部分集合 A_1, A_2 について $n(X) = 25, n(A_1) = 18, n(A_2) = 15$ であるとき, $n(A_1 \cap A_2)$ の取り得る値の最大値と最小値を求めよ.

(解) 各 k に対して $A_1 \cap A_2 \subset A_k \subset A_1 \cup A_2 \subset X$ は成り立つので, $n(A_1 \cap A_2) \leq n(A_1) = 18$, $n(A_1 \cap A_2) \leq n(A_2) = 15$ が得られ, $n(A_1 \cap A_2) \leq 15$ でなければならない. また,

$$25 = n(X) \geq n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = 33 - n(A_1 \cap A_2)$$

より $n(A_1 \cap A_2) \geq 8$ であるから, $8 \leq n(A_1 \cap A_2) \leq 15$ となる. したがって, $n(A_1 \cap A_2)$ の取り得る値の最大値は 15, 最小値は 8 である. ■

問題 2 100 円硬貨, 50 円硬貨, 10 円硬貨を用いて, 300 円を支払う方法は何通りあるか調べよ. ただし, それぞれの硬貨は十分枚数があるものとし, 用いない硬貨があってもよいものとする.

(解) 300 円の支払いに使う 100 円硬貨, 50 円硬貨, 10 円硬貨をそれぞれ x 枚, y 枚, z 枚とする. 条件

$$300 = 100x + 50y + 10z, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

をみたす整数の対 (x, y, z) は

$$\begin{array}{llllll} (0, 0, 30), & (0, 1, 25), & (0, 2, 20), & (0, 3, 15), & (0, 4, 10), & (0, 5, 5), \\ (0, 6, 0), & (1, 0, 20), & (1, 1, 15), & (1, 2, 10), & (1, 3, 5), & (1, 4, 0), \\ (2, 0, 10), & (2, 1, 5), & (2, 2, 0), & (3, 0, 0) & & \end{array}$$

であるから, 支払方法は 16 通りである. ■

問題 3 区別ができる 7 個の玉を次のように分ける方法は何通りあるか調べよ.

- (a) 3 人に分ける. ただし, 0 個の人がいてもよいとする.
- (b) 3 人に分ける. ただし, 0 個の人はいないとする.
- (c) 3 組に分ける. ただし, 0 個の組があってもよいとする.
- (d) 3 組に分ける. ただし, 0 個の組はないとする.

(解) (a) 各玉は 3 人誰にも配ることができるので, 求める場合の数は $3^7 = 2187$ 通りである. (b) (i) 7 個の玉すべてを 1 人に分ける場合の数は 3 通りである. (ii) 7 個の玉を 2 人にのみ 1 個以上分ける場合の数は, 分ける 2 人を決めたときの玉の分け方が $(2^7 - 2)$ 通りであり, 玉を分ける 2 人の選択方法が 3 通りであるから, $3 \times (2^7 - 2) = 378$ 通りである. したがって, 求める場合の数は $2187 - (3 + 378) = 1806$ 通りである. (d) 問 (b) において, 人を区別する必要がないので, $1806/3! = 301$ 通りである. (c) (i) 7 個の玉すべてを 1 組に分ける場合の数は 1 通りである. (ii) 7 個の玉を 2 組にのみ 1 個以上分ける場合の数は, 組を区別したときの玉の分け方は問 (b) で求めている. 組は区別する必要がないので, $(2^7 - 2)/2! = 63$ 通りである. 問 (d) より, 求める場合の数は $1 + 63 + 301 = 365$ 通りである. ■