確率統計学 1　解答例

2019.11.20

■　$\mu \in \mathbb{R}$，$\sigma > 0$ とするとき，

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \right\} dx$$

を求めよ．

（解）　指数関数の指数部は

$$t\,x - \frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} = -\frac{(x-\mu-\sigma^2\,t)^2}{2\,\sigma^2} + \frac{2\,\mu\,t + \sigma^2\,t^2}{2}$$

であるから，変数変換 $x = \sigma\,y + \mu + \sigma^2\,t$ により

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\,\mu\,t+\sigma^2\,t^2}{2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \right\} \sigma\,dy = e^{\frac{2\,\mu\,t+\sigma^2\,t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{\frac{2\,\mu\,t+\sigma^2\,t^2}{2}}$$

となる．■