確率統計学 1　解答例

2019.11.06

■　ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad z > 0$$

に対して，(1) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ が成り立つことを示し，(2) $\Gamma(1)$ および $\Gamma(1/2)$ を求めよ．必要があれば，

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$$

を用いても良い．

（解） (1) すべての $z > 0$ に対して $\lim_{t\to+\infty} t^z\, e^{-t} = 0$ が成り立つことに注意したい．部分積分法により

$$\Gamma(z+1) = \left[t^z \cdot (-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (z\, t^{z-1}) \cdot (-e^{-t})\, dt = z \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = z\,\Gamma(z)$$

が成り立つ．(2)

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

である．変数変換 $t = s^2/2$ （$s \geq 0$）により

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, s\, ds \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

となる．■