確率統計学１　解答例

2019.10.23

■　$0 < p < 1$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\{p^{k-1}\,(1-p)\}$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\{k\,p^{k-1}\,(1-p)\}$ を求めよ．

（解）等比無限級数の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{p^{k-1}\,(1-p)\} = \frac{1-p}{p}\cdot\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p}$$

である．極限 $\lim_{n\to\infty}(n\cdot p^n) = 0$ と変数変換 $\ell = k+1$ より，$n\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}
S_n =& \sum_{k=0}^{n}\{k\,p^{k-1}\,(1-p)\} = \sum_{k=1}^{n}\{k\,p^{k-1}\,(1-p)\} = \sum_{k=1}^{n}(k\,p^{k-1}) - \sum_{k=1}^{n}(k\,p^{k}) \\
=& \sum_{k=1}^{n}(k\,p^{k-1}) - \sum_{\ell=2}^{n+1}\{(\ell-1)\,p^{\ell-1}\} = 1\cdot p^0 + \sum_{k=2}^{n}[\{k-(k-1)\}\cdot p^{k-1}] - n\cdot p^n \\
=& 1 - n\cdot p^n + \sum_{k=2}^{n}p^{k-1} = 1 - n\cdot p^n + p\cdot\frac{1-p^{n-1}}{1-p} \to 1 - 0 + p\cdot\frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p}
\end{aligned}$$

となるので，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{k\,p^{k-1}\,(1-p)\} = \frac{1}{1-p}$$

である．■