確率統計学概論　解答例

2019.05.29

■　$n \geq 2$ を自然数とする．n 本のクジに当たりクジが 2 本含まれており，引いたクジは元に戻さないとき，k （$1 \leq k \leq n$）番目の人が当たりクジを引く確率を p_k とする．各 k に対して p_k を求めよ．

（解） n 個から k 個取り出し，並べかえる場合の数 ${}_nP_k$ は

$$ {}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}; \qquad {}_nP_\ell \cdot {}_{n-\ell}P_k = {}_nP_{\ell+k} \qquad (1 \leq \ell + k \leq n) $$

をみたすことに注意したい．

k 番目の人が当たりクジを引くためには，当たりクジが (1) 1 本，または，(2) 2 本残っていなければならない．(1) 1 番目の人がクジを引く際には当たりクジが 2 本残っているので，$2 \leq k \leq n$ である．1 番目から $(k-1)$ 番目の人のうち，ℓ （$1 \leq \ell < k$）番目の人が当たりクジを引き，その他がはずれクジを引く場合には

$$ \frac{{}_{n-2}P_{\ell-1}}{{}_nP_{\ell-1}} \cdot \frac{{}_2P_1}{{}_{n-(\ell-1)}P_1} \cdot \frac{{}_{n-2-(\ell-1)}P_{k-1-\ell}}{{}_{n-\ell}P_{k-1-\ell}} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_{n-(k-1)}P_1} = \frac{2 \cdot {}_{n-2}P_{k-2}}{{}_nP_k} = \frac{2}{n\,(n-1)} $$

となるので，この場合の確率は

$$ \frac{2\,(k-1)}{n\,(n-1)} $$

である．$k=1$ のときには確率が 0 であるから，$k=1$ のときも確率を上式のように書いて良い．(2) n 番目の人がクジを引く際には当たりクジは高々 1 本であるから，$1 \leq k < n$ である．1 番目から $(k-1)$ 番目の人すべてがはずれクジを引かなけれなならないので，この場合の確率は

$$ \frac{{}_{n-2}P_{k-1}}{{}_nP_{k-1}} \cdot \frac{{}_2P_1}{{}_{n-(k-1)}P_1} = \frac{2 \cdot {}_{n-2}P_{k-1}}{{}_nP_k} = \frac{2\,(n-k)}{n\,(n-1)} $$

である．$k=n$ のときには確率が 0 であるから，$k=n$ のときも確率を上式のように書いて良い．以上から，

$$ p_k = \frac{2\,(k-1)}{n\,(n-1)} + \frac{2\,(n-k)}{n\,(n-1)} = \frac{2}{n} $$

である．■