確率統計学概論　解答例

2019.05.08

■　各自然数 n に対して閉区間 A_n および半開区間 B_n をそれぞれ

$$A_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right], \qquad B_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

により定義するとき，

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad R = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad S = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

を求めよ．

（解） 任意の集合 U，V に対して，$U \subset V$ ならば，$U \cap V = U$，$U \cup V = V$ が成り立つ[*1]ことに注意したい．各自然数 n に対して

$$[0,1] \subset A_{n+1} \subset A_n, \qquad [0,1] \subset B_{n+1} \subset B_n \tag{E}$$

であるから，

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \subset A_1, \qquad \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \subset B_1$$

となり[*2]，

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right) = A_1 = [0,2], \qquad R = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) = B_1 = [0,2)$$

が得られる．また，(E) より $[0,1] \subset Q$，$[0,1] \subset S$ が成り立つ[*3]．$x > 1$ ならば，$m > 2/(x-1)$ をみたすような自然数 m を取ると，

$$1 + \frac{1}{m} < 1 + \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} < x$$

より $x \notin A_m$，$x \notin B_m$ となるので，$x \notin Q$，$x \notin S$ であるから，$Q = [0,1]$，$S = [0,1]$ である．■

[*1] （$U \cap V = U$）：$U \cap V \subset U$ は明らかである．任意に $x \in U$ を取ると，$x \in U \subset V$ より $x \in U \cap V$ である，つまり，$U \subset U \cap V$ である．以上から，$U \cap V = U$ である．（$U \cup V = V$）：$V \subset U \cup V$ は明らかである．$U \subset V$ より，任意に $x \in U \cup V$ を取ると，$x \in U \subset V$ または $x \in V$ である，つまり，$U \cup V \subset V$ である．以上から，$U \cup V = V$ である．

[*2] $\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \subset B_1$ についても同様に示せるので，$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \subset A_1$ についてのみ示す．任意に $x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ を取ると，ある自然数 $m \geq 2$ に対して $x \in A_m \subset A_1$ が成り立つ．したがって，$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \subset A_1$ となる．

[*3] $[0,1] \subset Q$ についてのみ示す．任意に $x \in [0,1]$ を取る．すべての自然数 n に対して $x \in A_n$ であるから，$x \in Q$ となる．したがって，$[0,1] \subset Q$ である．