

解析学概論 試験問題

2010.07.28

試験問題は全部で 3 問です。参考書などの資料の持ち込みはできません。

- (1) 解答用紙は 3 枚です。解答用紙すべてに名前を書いてください。また、表面だけで足りなければ、裏面も使用してください。
- (2) 問題番号、答えを導いた過程、最終的な答えなどを解答用紙に書いてください。また、問題文に現れない記号を使うときには、その説明を必ず書いてください。

1 θ は $0 < \theta < \pi$ をみたす定数とし、 $X = \cos \theta$,

$$Y_n = \cos n\theta, \quad Z_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく。数学的帰納法を用いて、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 Y_n と Z_n は X に関する n 次多項式であることを示せ。

2 $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ における二項関係 \preceq を

$$(p_1, q_1) \preceq (p_2, q_2) \iff p_1 \leq p_2 \text{ かつ } q_1 \geq q_2$$

で定義する。 \preceq は X における順序関係であるが、全順序関係ではないことを示せ。

3 \mathbb{Q} における二項関係 \sim を

$$p \sim q \iff p - q \in \mathbb{Z}$$

で定義する。次の問いに答えよ。

- (1) \sim は X における同値関係であることを示せ。
- (2) \sim による $p \in \mathbb{Q}$ を代表元とする同値類を $[p]$ と表すとき、 $[p] = \{p + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つことを示せ。
- (3) \sim による \mathbb{Q} の商集合 $X = \mathbb{Q}/\sim$ に対して、演算 $\#$ を

$$[p]\#[q] = [p + q]$$

で定義するとき、 $\#$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義されていることを示せ。

- (4) X は $\#$ に関して群となることを示せ。