解析学２　解答例

2018.06.25

■　$1 < \gamma < 2$ とし，$\gamma^* = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}$ とおく．また，数列 $\{\,x_n\,\}$ を

$$x_1 = \frac{1}{2}; \qquad x_{n+1} = \gamma\, x_n\,(1 - x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

により定める．このとき，すべての自然数 n に対して $\gamma^* \le x_{n+1} \le x_n \le \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

（解） $0 < \gamma^* < 1/2$ であることに注意したい．示すべき不等式を (E) と表し，$f(x) = \gamma\, x\,(1 - x)$ とおく．

$$f(x) = -\gamma \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{4} \le \frac{\gamma}{4} < \frac{1}{2}$$

より, すべての x に対して $f(x) < 1/2$ であり, $x \le 1/2$ の範囲で $f(x)$ は単調増加関数である．$\gamma^* \le x_1 \le 1/2$ より

$$\gamma^* = f(\gamma^*) \le x_2 = f(x_1) \le f(1/2) < x_1 = \frac{1}{2}$$

となり，$n = 1$ のとき不等式 (E) が成り立つ．$n = k$ のとき不等式 (E) が成り立つとする．γ^*，x_{k+1}，x_k，$1/2$ を $f(x)$ で移すと，$f(x)$ の単調性により

$$\gamma^* = f(\gamma^*) \le x_{k+2} = f(x_{k+1}) \le x_{k+1} = f(x_k) \le f(1/2) < \frac{1}{2}$$

が得られ，$n = k + 1$ のときも不等式 (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して不等式 (E) が成り立つ．

数列 $\{\,x_n\,\}$ は下に有界な単調減少数列であるから，極限 $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在するので，

$$0 < \gamma^* \le x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \{\gamma\, x_n\,(1 - x_n)\} = \gamma\, x^*\,(1 - x^*)$$

より $x^* = (\gamma - 1)/\gamma = \gamma^*$ が得られ，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \gamma^*$$

である．■