

■ 実数 $x = (B, A)$, $y = (D, C)$ に対して, 関係 \preceq を

$$x \preceq y \stackrel{\text{定義}}{\iff} C \subset A$$

により定義すると, 関係 \preceq は \mathbb{R} における順序関係である (証明しなくて良い). $x \preceq y$ かつ $x \neq y$ がみたされるとき, $x \prec y$ と表すことにする. このとき, $x \not\preceq y$ ならば $y \prec x$ が成り立つことを示せ.

(解) $x \not\preceq y$ とする. 定義より $C \not\subset A$ となり, ある $q \in \mathbb{Q}$ が取れて $q \in C$ かつ $q \notin A$ が成り立つ. 切断の定義 (D1) より $q \in B$ である. 任意に $r \in A$ を取る. 切断の定義 (D2) より $q < r$ である. $r \in D$ とすると, 切断の定義 (D2) より $r < q$ となり, $q < r$ であることに矛盾するので, $r \notin D$ である. 切断の定義 (D1) より $r \in C$ が得られる. したがって, $A \subset C$ である. また, $q \in C$ かつ $q \notin A$ より $A \neq C$ であるから, 関係 \prec の定義より $y \prec x$ となる. ■