解析学２　解答例

2018.04.09

■　次の問に答えよ．

(1) 方程式 $x^2 = 2$ は有理数解をもたない（$\sqrt{2}$ は有理数でない）ことを示せ．

(2) 有理数の集合 A，B を

$$A = \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \geq 2 \text{ かつ } x \geq 0 \,\}, \qquad B = \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2 \text{ または } x < 0 \,\}$$

により定義する．このとき，$\min A$ および $\max B$ は存在しないことを示せ．

（解） (1) 方程式 $x^2 = 2$ が有理数解をもつと仮定する．このとき，その有理数解は互いに素な整数 n と自然数 m を用いて n/m と表すことができ，n と m は関係式 $n^2 = 2\,m^2$ をみたす，つまり，n^2 は 2 で整除できる．n を 2 で割ったときの商を ℓ，余りを r （$r = 0$ または $r = 1$）とおくと，$n = 2\,\ell + r$ より $n^2 = 2\,(2\,\ell + 2\,\ell\,r) + r^2$ が得られる．$r = 1$ のときには，n^2 を 2 で割った余りは 1 となり，n^2 が 2 で整除できることに矛盾する．したがって，$r = 0$，つまり，$n = 2\,\ell$ であり，$m^2 = 2\,\ell^2$ となる．同様の議論により，ある自然数 k が取れて $m = 2\,k$ と表される．以上から，2 は n と m の公約数であり，n と m が互いに素であることに反する．背理法により，方程式 $x^2 = 2$ は有理数解をもたない．

(2) $a = \min A$ が存在するとすると，a は $a^2 \geq 2$，$a \geq 0$ をみたす有理数であるから，(1) より $a^2 > 2$ となり，

$$f(x) = \frac{3\,x + 2}{x + 3}$$

とおくと，

$$0 < f(a) \in \mathbb{Q}, \qquad f(a) - a = \frac{2 - a^2}{a + 3} < 0, \qquad \{f(a)\}^2 - 2 = \frac{7\,(a^2 - 2)}{(a + 3)^2} > 0$$

より $a > f(a) \in A$ が得られ，a の最小性に反する．したがって，$\min A$ は存在しない．また，$b = \max B$ が存在するとすると，b は $b^2 < 2$ または $b < 0$ をみたす有理数であるから，

$$f(b) \in \mathbb{Q}, \qquad f(b) - b = \frac{2 - b^2}{b + 3} > 0, \qquad \{f(b)\}^2 - 2 = \frac{7\,(b^2 - 2)}{(b + 3)^2} < 0$$

より $b < f(b) \in B$ が得られ，b の最大性に反する．したがって，$\max B$ は存在しない．■