

■  $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  における二項関係  $\overset{R}{\sim}$  を

$$(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき、二項関係  $\overset{R}{\sim}$  は  $X$  における同値関係であることを示せ.

(解) (1)  $n + m = n + m$  より  $(n, m) \overset{R}{\sim} (n, m)$  である. (2)  $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2)$  であると仮定する. 二項関係  $\overset{R}{\sim}$  の定義より  $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$  であるから、左辺と右辺を入れ替えると、 $n_2 + m_1 = n_1 + m_2$  となり、二項関係  $\overset{R}{\sim}$  の定義より  $(n_2, m_2) \overset{R}{\sim} (n_1, m_1)$  が得られる. (3)  $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2)$  かつ  $(n_2, m_2) \overset{R}{\sim} (n_3, m_3)$  であると仮定する. 二項関係  $\overset{R}{\sim}$  の定義より  $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ ,  $n_2 + m_3 = n_3 + m_2$  であるから、

$$\begin{aligned} (n_1 + m_3) + m_2 &= (n_1 + m_2) + m_3 = (n_2 + m_1) + m_3 \\ &= (n_2 + m_3) + m_1 = (n_3 + m_2) + m_1 = (n_3 + m_1) + m_2 \end{aligned}$$

が成り立ち、簡約法則により  $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$  が得られる. 二項関係  $\overset{R}{\sim}$  の定義より  $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_3, m_3)$  となる. 以上から、二項関係  $\overset{R}{\sim}$  は  $X$  における同値関係である. ■