

■ 集合  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  における二項関係  $\sim$  を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \stackrel{\text{定義}}{\iff} \exists r > 0 : x_1 = r x_2 \text{ かつ } y_1 = r y_2$$

により定義するとき、二項関係  $\sim$  は  $X$  における同値関係であるかどうかを調べよ。

(解) (1)  $x = 1 \cdot x$ ,  $y = 1 \cdot y$  であるから、 $r = 1$  と取ることにより  $(x, y) \sim (x, y)$  が成り立つ。(2)  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$  とする。定義より、ある  $r > 0$  が取れて  $x_1 = r x_2$  かつ  $y_1 = r y_2$  が成り立つ。 $\hat{r} = 1/r$  とおくと、

$$\hat{r} > 0, \quad x_2 = \hat{r} x_1, \quad y_2 = \hat{r} y_1$$

が得られるので、 $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$  である。(3)  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$  かつ  $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$  とする。定義より、ある  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$  が取れて、

$$x_1 = r_1 x_2, \quad y_1 = r_1 y_2, \quad x_2 = r_2 x_3, \quad y_2 = r_2 y_3$$

が成り立つ。 $r = r_1 r_2$  とおくと、

$$r > 0, \quad x_1 = r_1 (r_2 x_3) = r x_3, \quad y_1 = r_1 (r_2 y_3) = r y_3$$

が得られるので、 $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$  である。以上から、二項関係  $\sim$  は  $X$  における同値関係である。 ■