

■ 集合 A, B に対して, 次の関係式が成り立つことを示せ.

$$(1) A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$(2) A \cap B = A \iff A \subset B$$

(解) (1) $x \in A \cap B$ を任意にとると, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるから $x \in A$ が成り立つ. したがって, $A \cap B \subset A$ である. また, $x \in A$ を任意にとると, $x \in B$ であるかどうかに関わらず命題「 $x \in A$ または $x \in B$ 」は真である. したがって,

$$\forall x : x \in A \implies x \in A \cup B$$

が成り立つので, $A \subset A \cup B$ である. (2) (\implies) $A \cap B = A$ ならば, 前問題 (1) より $A = A \cap B \subset B$ が成り立つ. (\impliedby) $A \subset B$ を仮定する. 前問題 (1) より $A \subset A \cap B$ を示せば良い. 任意に $x \in A$ を取ると, 仮定より $x \in A \subset B$ であるから, $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ. したがって, $A \subset A \cap B$ である. ■