解析学概論　解答例

2018.10.09

■　a，b を整数とし，$f(x) = x^2 + a\,x + b$ とおく．このとき，方程式 $f(x) = 0$ の解が有理数であれば，その解は整数であることを示せ．

（解）　方程式 $f(x) = 0$ の任意の有理数解を α とする．このとき，互いに素な $p \in \mathbb{Z}$ と $q \in \mathbb{N}$ を用いて $\alpha = p/q$ と表せる．

$q \geq 2$ と仮定する．r を q の任意の素因数とすると，明らかに $r \geq 2$ である．方程式 $f(x) = 0$ に α を代入し整理すると，

$$p^2 = -q\,(a\,p + b\,q)$$

が得られ，p^2 は r で整除できることが分かる．p の素因数分解を考えると，r は素数であるから，r は p の素因数である．つまり，$\gcd(p, q) \geq r \geq 2$ となり，p と q が互いに素であることに矛盾する．したがって，$q = 1$，つまり，α は整数である．■