

## 解析学 II 解答例

2018.05.28

■ 赤白 2 種類の玉がたくさんある。そのうち 4 個の白玉を袋に入れて、次の操作を繰り返し行う。

良くかきまぜて袋から玉を 1 個取り出す。取り出した玉が、白玉なら赤玉に、赤玉なら白玉に取り換えて、袋に戻す。

この操作を  $n$  回繰り返した直後、赤玉が袋の中に 0, 1, 2, 3, 4 個である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$  とする。このとき、 $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}, t_{n+1}$  を  $p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$  を用いて表せ。

(解) 操作を  $n$  回繰り返した直後、袋の中にある赤玉の個数を  $X_n$  とする。

条件付き確率  $P(X_{n+1} = i | X_n = j)$

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
0	0	1/4	0	0	0
1	4/4	0	2/4	0	0
2	0	3/4	0	3/4	0
3	0	0	2/4	0	4/4
4	0	0	0	1/4	0

左表から求める関係式は

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 4/4 & 0 & 2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2/4 & 0 & 4/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

である。 ■