解析学 II　解答例

2018.04.09

■　$a \neq 0$ とする．すべての自然数 n に対して

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \tag{E}$$

が成り立つことを，直接計算する方法と数学的帰納法による方法それぞれで示せ．

(解)　直接計算する方法 : 行列 X に対して $X^0 = E$ と約束する．行列 A，B を

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\,E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A\,B = B\,A$，$A^k = a^k\,E$　$(k \in \mathbb{N})$，$B^2 = O$ が成り立つので，二項定理より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n &= (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,A^{n-k}\,B^k \\ &= {}_nC_0\,A^n\,B^0 + {}_nC_1\,A^{n-1}\,B^1 = a^n\,E + n\,a^{n-1}\,B = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる．

　数学的帰納法による方法 : (a) $n = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 1 \cdot a^0 \\ 0 & a^1 \end{pmatrix}$$

より (E) が成り立つ．(b) $n = k$ のとき (E) が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & k\,a^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & k\,a^k + a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)\,a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$n = k+1$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ．■