

■ \mathbb{R}^2 における二項関係 \sim^R を

$$(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ かつ } y_1 \leq y_2$$

で定義するとき, (1) 二項関係 \sim^R は \mathbb{R}^2 における順序関係であることを示せ. また, (2) 二項関係 \sim^R は \mathbb{R}^2 における全順序関係であるかどうかを調べよ.

(解) (1) (i) $x \leq x, y \leq y$ より $(x, y) \sim^R (x, y)$ である. (ii) $(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim^R (x_1, y_1)$ であると仮定する. 定義より

$$x_1 \leq x_2, \quad y_1 \leq y_2, \quad x_2 \leq x_1, \quad y_2 \leq y_1$$

が成り立つので, $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ が得られ, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ となる. (iii) $(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim^R (x_3, y_3)$ であると仮定する. 定義より

$$x_1 \leq x_2, \quad y_1 \leq y_2, \quad x_2 \leq x_3, \quad y_2 \leq y_3$$

が成り立つので, $x_1 \leq x_3$ かつ $y_1 \leq y_3$ が得られ, $(x_1, y_1) \sim^R (x_3, y_3)$ となる. 以上から, 二項関係 \sim^R は \mathbb{R}^2 における順序関係である.

(2) $(1, 1) \not\sim^R (2, -1), (2, -1) \not\sim^R (1, 1)$ より, 二項関係 \sim^R は \mathbb{R}^2 における全順序関係ではない. ■