解析学 II　解答例

2017.06.26

■　$-1 < \alpha < 1$ とし，原点を中心とする半径 $r > 0$ の円に沿って正の向きに 1 周する曲線を $C(r)$ とする．このとき，極限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C(R)}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz, \qquad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C(\varepsilon)}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz$$

を調べよ．

(解)　変数変換 $z = r\,e^{i\,\theta}$　$(0 \le \theta \le 2\,\pi)$ により

$$\int_{C(r)}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz = \int_0^{2\,\pi}\frac{r^\alpha\,e^{i\,\alpha\,\theta}}{1+r^2\,e^{i\,2\,\theta}}\,r\,i\,e^{i\,\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\,\pi}\frac{r^{\alpha+1}\,e^{i\,(\alpha+1)\,\theta}}{1+r^2\,e^{i\,2\,\theta}}\,d\theta$$

であることに注意したい．ルベーグの収束定理[*1]と $-1 < \alpha < 1$ より

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_{C(R)}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz =& i\int_0^{2\,\pi}\left(\lim_{R\to+\infty}\frac{R^{\alpha-1}\,e^{i\,(\alpha+1)\,\theta}}{R^{-2}+e^{i\,2\,\theta}}\right)d\theta\\ =& i\int_0^{2\,\pi}\frac{0}{0+e^{i\,2\,\theta}}\,d\theta = i\int_0^{2\,\pi}0\,d\theta = 0,\\ \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C(\varepsilon)}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz =& i\int_0^{2\,\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^{\alpha+1}\,e^{i\,(\alpha+1)\,\theta}}{1+\varepsilon^2\,e^{i\,2\,\theta}}\right)d\theta\\ =& i\int_0^{2\,\pi}\frac{0}{1+0}\,d\theta = i\int_0^{2\,\pi}0\,d\theta = 0\end{aligned}$$

となる．■

[*1] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，E を可測集合とする．また，各 $a < t < b$ に対して $f(\cdot, t) : E \to \mathbb{R}$ が定義されていると仮定する．(1) ほとんど至るところで（μ について測度が 0 である集合を除いて）$\lim_{t\to\tau} f(x,t) = f(x,\tau)$ が成り立ち，(2) 各 $t \in (a, b)$ に対して $|\,f(x,t)\,| \le g(x)$ をみたす可積分関数 $g(x)$ が存在するならば，

$$\lim_{t\to\tau}\int_E f(x,t)\,d\mu(x) = \int_E f(x,\tau)\,d\mu(x)$$

が成り立つ．